

FIA 2020/22

XII CONGRESSO/CONGRESO IBEROAMERICANO DE ACÚSTICA
XXIX ENCONTRO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE ACÚSTICA - SOBRAC

Florianópolis, SC, Brasil

Ferramenta open source para simulação em acústica de salas na região de baixa frequência

Soares, M. S.¹; Brandão, E.²; Tenenbaum, R. A.³; Mareze, P. H.⁴

^{1,2,3} Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, Brasil,
murilo.c.soares@outlook.com, eric.brandao@eac.ufsm.br, ratenenbaum@gmail.com

⁴ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, Brasil,
paulo.mareze@eac.uf.brsm

Resumo

Para simular corretamente o comportamento acústico em salas na região de baixas frequências, mais especificamente abaixo da frequência de Schroeder, deve-se utilizar um método que ofereça uma solução da equação da onda, o que está relacionado à baixa densidade modal. Um dos métodos que podem ser empregados é o método dos elementos de contorno (BEM - Boundary Element Method), cuja a principal característica é a necessidade de discretização somente das superfícies da sala. No presente trabalho é apresentada uma ferramenta de simulação de código aberto que utiliza BEM. A presente ferramenta utiliza o framework do Bempp em conjunto com a técnica dos harmônicos esféricos para considerar a direcionalidade das fontes sonoras. Além disso, foi incorporado um método que permite a obtenção de impedâncias de superfície complexas a partir de dados experimentais de coeficientes de absorção medidos sob incidência difusa em bandas de oitava ou terço de oitava. Isso é importante porque os coeficientes de absorção não representam condições de contorno adequadas para o método BEM. A ferramenta de simulação está disponível em linguagem Python. É apresentada uma visão geral a respeito das funcionalidades e etapas de simulação e também são apresentados resultados para algumas salas. Quando comparada à abordagem tradicional, que utiliza valores reais de impedância de superfície, a utilização do método para recuperar impedâncias de superfície complexas permitiu uma melhor predição da função resposta em frequência, especialmente para salas mais amortecidas.

Palavras-chave: método dos elementos de contorno, acústica de salas, impedância de superfície, harmônicos esféricos.

PACS: 43.55.Br, 43.20.Ks, 43.20.Rz, 43.55.Ev.

Open source tool for low-frequency room acoustical simulation

Abstract

To simulate correctly the low-frequency acoustic behavior in a room, more specifically below the Schroeder frequency, it must be used a method that solves the wave equation, due to the low modal density. One of the methods that can be used is the Boundary Element Method (BEM), whose main characteristic is that only the surfaces of the room need to be discretized. In the present work, an open source simulation tool that uses BEM is presented. This tool uses Bempp's framework in conjunction with the spherical harmonics technique to consider sound sources directivity. In addition, a method was incorporated that allows obtaining complex valued surface impedances from experimental data of absorption coefficients measured under diffuse incidence in octave or third octave bands. This is important because the absorption coefficients do not represent suitable boundary conditions for the BEM method. The simulation tool is available in Python language. An overview of the features and simulation steps is presented and results are also presented for some rooms. When compared to the traditional approach, which uses real valued surface impedances, the use of the method to recover complex surface impedances allowed a better prediction of the frequency response function, especially for more damped rooms.

Keywords: boundary element method, room acoustics, surface impedance, spherical harmonics.



1. INTRODUÇÃO

A simulação computacional é uma importante ferramenta para o projeto acústico de salas. Por meio da simulação é possível conhecer o comportamento acústico de um ambiente ainda no processo de concepção e avaliar o impacto de possíveis intervenções.

Em acústica de salas é útil dividir o espectro em algumas regiões de frequência. Isso acontece porque a relação entre comprimento de onda e dimensões da sala é importante para considerar o modelo matemático que será utilizado para calcular o campo acústico em uma simulação numérica de acústica de salas. Em uma sala retangular, a primeira ressonância será formada na frequência $f_1 = c_0/(2L_x)$, em que c_0 é a velocidade do som no ar e L_x é a maior das dimensões da sala. Na região de baixa frequência, as dimensões da sala acomodam diversos múltiplos inteiros de $\lambda/2$, havendo a formação de modos acústicos e de ressonâncias na função resposta em frequência (FRF) do sistema sala-fonte-receptor. A frequência de Schroeder, f_s [Hz], que define o limite superior desse comportamento, é dada por

$$f_s = 2000 \sqrt{\frac{T_{60}}{V}}, \quad (1)$$

em que T_{60} é o tempo de reverberação, em [s], e V é o volume da sala, em [m³]. Essa frequência crítica foi encontrada por meio de análises de dados experimentais por Manfred Schroeder [1]. O número de modos acústicos em uma sala cresce aproximadamente com o cubo da frequência, e considera-se que a partir de f_s há pelo menos três modos por Hz, o que faz com que algumas ressonâncias da FRF sejam formadas pela influência de diversos modos acústicos.

Diferentes modelos computacionais podem ser empregados, tendo em mente o custo computacional e uma eficaz consideração dos fenômenos físicos envolvidos. A maioria dos *software* de acústica de salas disponíveis comercialmente são baseados nos métodos de acústica geométrica [2, 3]. Os modelos matemáticos utilizados nesses métodos são baseados na soma energética de frentes de onda discretizadas. Ao utilizar métodos baseados na acústica geométrica o custo computacional envolvido é reduzido. Entretanto, a simulação é pre-

cisa somente para a região de frequência com uma alta densidade modal, ou seja, acima da frequência de Schroeder, f_s . Mas para a região de baixa frequência, apesar de existirem soluções analíticas para certas condições mais simples [4, 5], geometrias mais complexas necessitam utilizar métodos numéricos que solucionem a equação da onda.

Entre os métodos numéricos baseados na solução equação da onda, pode-se citar o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos e, de especial importância para o presente trabalho, o método dos elementos de contorno (BEM, do inglês *Boundary Element Method*) [6–15]. Para esse tipo de modelagem, o custo computacional cresce com o aumento da frequência e com as dimensões da sala, o que inviabiliza seu uso em todo o espectro audível (20 Hz a 20 kHz). Analisando a Equação (1), é possível observar que a frequência de Schroeder tende a aumentar com a diminuição do volume da sala. Assim, especialmente para salas com pequenos volumes, para as quais a frequência de Schroeder tende a ser elevada, é necessária a utilização de um método que resolva a equação da onda para a região de baixa frequência e outro método, menos custoso computacionalmente, para o restante do espectro. No BEM, apenas as superfícies de uma sala são discretizadas em uma malha e cada nó dessa malha é caracterizado pela impedância de superfície do material, Z_s . Isso pode ser uma vantagem frente a outros métodos, como o método dos elementos finitos e o método das diferenças finitas, nos quais todo o volume do domínio deve ser discretizado. A regra prática é que deve haver entre seis e doze elementos por comprimento de onda. Dessa forma, quanto mais alta for a frequência de análise, maior será o custo computacional envolvido.

A formulação convencional do BEM considera que as fontes sonoras e os receptores são pontuais e onidirecionais. Para incluir a direcionalidade desses elementos pode-se utilizar a técnica dos harmônicos esféricos [11, 16, 17]. A inclusão da direcionalidade dos receptores permite a obtenção de resultados biauriculares, com os quais é possível buscar reproduzir a sensação de se estar virtualmente presente no ambiente utilizando a técnica da auralização [2]. No presente traba-

lho, a técnica dos harmônicos esféricos é aplicada somente na caracterização das fontes sonoras.

Outro desafio relacionado à aplicação do BEM é a caracterização dos materiais aplicados nos ambientes. A rigor, é necessário definir os valores complexos das impedâncias de superfície ($Z_s \in \mathbb{C}$) que constituem as superfícies da sala. Entretanto, não é comum que esses valores sejam fornecidos, por exemplo, por fabricantes de materiais sono-absorventes. O mais comum é que se forneçam os coeficientes de absorção medidos conforme a ISO 354 [18] sob incidência difusa, que, por sua vez, são valores reais ($\alpha_s \in \mathbb{R}$). Uma solução a este problema é fazer uma aproximação direta de uma impedância de superfície real ($Z_s \in \mathbb{R}$) a partir de coeficientes de absorção [19]. Essa abordagem, entretanto, leva a impedâncias de superfície com valores reais, o que pode não caracterizar de forma adequada o comportamento do material. Na ferramenta aqui desenvolvida foi implementado um método, apresentado inicialmente por Mondet et al. [20, 21], que busca recuperar os valores complexos de impedância de superfície a partir dos valores reais de coeficientes de absorção. Esse método é baseado em um problema inverso de otimização cujas restrições estão relacionadas ao tipo de absorvedor que se está analisando.

No presente trabalho é apresentada uma ferramenta de simulação em acústica de salas para a região de baixa frequência que utiliza o BEM. Outros trabalhos e resultados obtidos com o uso dessa ferramenta de simulação podem ser encontrados nas Refs. [22–24]. As Seções 2, 3, 4 e 5 apresentam a fundamentação teórica necessária. Na Seção 2 é descrito o método dos elementos de contorno, na Seção 3 é apresentada a técnica dos harmônicos esféricos e nas Seções 4 e 5 são discutidos aspectos relacionados à caracterização dos materiais na simulação, incluindo o método que permite a obtenção de valores complexos de impedância de superfície a partir dos valores reais de coeficientes de absorção. Na Seção 6 apresenta-se um resumo das funcionalidades da ferramenta de simulação. Na Seção 7 são apresentados e discutidos alguns resultados obtidos com o uso da ferramenta de simulação, seguido pela conclusão na Seção 8.

2. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO

O método dos elementos de contorno (BEM) é utilizado para resolver problemas físicos descritos por equações diferenciais parciais ou equações integrais. Para uma onda monocromática com frequência angular ω [rad/s], a equação da onda torna-se a equação de Helmholtz, que pode ser resolvida utilizando o BEM [12–15]. Neste trabalho assume-se que a dependência do tempo é dada por $e^{-j\omega t}$, termo que será omitido nas equações.

O problema resolvido pelo BEM consiste na solução de equações integrais, que podem ser escritas utilizando a notação de operadores. Além de ser uma forma abreviada, esse tipo de notação demonstra a relação existente entre a equação integral e o sistema de equações lineares que resultam da sua discretização. Assim, podem-se definir os seguintes operadores:

$$\mathcal{S}\{\Phi\}(\mathbf{x}) = \iint_{\Gamma} \Phi(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}}; \quad (2)$$

$$\mathcal{D}\{\Phi\}(\mathbf{x}) = \iint_{\Gamma} \Phi(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} d\Gamma_{\mathbf{y}}, \quad (3)$$

em que $\mathbf{x}$ é um ponto pertencente ao domínio investigado, $\mathbf{y}$ é um ponto na superfície que delimita tal domínio e $\mathbf{n}_{\mathbf{y}}$ é o vetor normal à superfície em $\mathbf{y}$. Os operadores $\mathcal{S}\{\Phi\}(\mathbf{x})$ e $\mathcal{D}\{\Phi\}(\mathbf{x})$ estão definidos para uma superfície Γ e são utilizados para calcular a pressão Φ . $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é a função de Green e, fisicamente, representa o efeito observado em um ponto $\mathbf{y}$ causado por uma fonte pontual em um ponto $\mathbf{x}$. Em um problema tridimensional ela pode ser escrita como

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad (4)$$

em que $k = \omega/c_0$ é a magnitude do número de onda, em [rad/m], e c_0 é a velocidade do som, em [m/s]. A equação integral a ser resolvida para todos os pontos $\mathbf{y} \in \Gamma$ é re-escrita como

$$\left[\mathcal{D} - \frac{1}{2}\mathcal{I} + jk\mathcal{S} \right] \{\Phi_{\Gamma}\}(\mathbf{y}) = -\Phi_{\text{inc}}(\mathbf{y}). \quad (5)$$

O objetivo é encontrar o valor de $\{\Phi_{\Gamma}\}(\mathbf{y})$ para cada nó da malha, o que torna necessário o cálculo



e a inversão de uma matriz. É neste procedimento que reside o maior custo computacional envolvido no BEM. $\mathcal{I}$ é a matriz identidade e $\mathcal{Y}$ é uma matriz contendo a admitância normalizada dos materiais que compõem as superfícies do domínio. Φ_{inc} é a pressão incidente em cada nó da malha e pode, na forma mais geral, ser descrita multiplicando-se a função de Green, apresentada na Equação (4), por $j\rho_0\omega Q_s$, sendo Q_s a velocidade de volume, em $[\text{m}^3/\text{s}]$. Q_s e a potência acústica da fonte, W , estão relacionados por

$$Q_s = \sqrt{W \frac{c_0 8\pi}{\rho_0 \omega^2}}, \quad (6)$$

em que ρ_0 é a densidade do ar, em $[\text{kg}/\text{m}^3]$. A pressão difratada, Φ_{dif} , será

$$\Phi_{\text{dif}}(\mathbf{x}) = [\mathcal{D} + jk\mathcal{S}\mathcal{Y}] \{\Phi_{\Gamma}\}(\mathbf{y}). \quad (7)$$

Por fim, a pressão total, $\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x})$, pode ser calculada por

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \Phi_{\text{inc}}(\mathbf{x}) + \Phi_{\text{dif}}(\mathbf{x}). \quad (8)$$

3. A TÉCNICA DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS

Nas aplicações mais comuns em acústica de salas, a direcionalidade de fontes e receptores é negligenciada. A formulação padrão do BEM, por exemplo, considera fontes e receptores pontuais e onidirecionais, como foi apresentado na Seção 2. A técnica dos harmônicos esféricos permite considerar essa direcionalidade nas simulações realizadas. A implementação utilizada no presente trabalho foi adaptada das rotinas de programação desenvolvidas por Hargreaves et. al. [11]. Por isso, para uma análise mais profunda a respeito do método, o leitor é remetido a esse trabalho e sua documentação. Na presente pesquisa, a técnica dos harmônicos esféricos é utilizada somente para a caracterização das fontes sonoras.

O padrão de direcionalidade de uma fonte pode ser descrito na forma de uma decomposição em funções ortonormais de harmônicos esféricos, $Y_n^m(\beta, \alpha)$, de grau $n \geq 0$ e ordem m , com $-n \leq m \leq +n$ e $(m, n \in \mathbb{Z})$ [25]. Como produto da decomposição da informação espacial em harmônicos esféricos se obtém um conjunto de coefi-

entes que quantifica a contribuição de cada função de ordem n e grau m . O processo é semelhante ao que ocorre com o uso da transformada de Fourier [26], que permite que um sinal dado no domínio do tempo seja representado por uma combinação linear de funções harmônicas do tipo $e^{-j\omega t}$. Aqui, esse processo de decomposição permite representar uma função escalar em dois domínios equivalentes: o domínio dos harmônicos esféricos e o domínio espacial. A Figura 1 ilustra funções de harmônicos de diferentes ordens e graus.

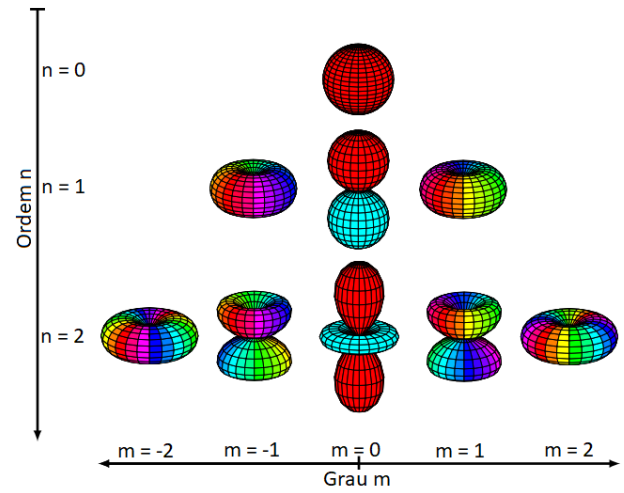


Figura 1: Ilustração de funções de harmônicos esféricos com diferentes ordens n e graus m (adaptado de Pollow [25]).

4. A IMPEDÂNCIA DE SUPERFÍCIE E O COEFICIENTE DE ABSORÇÃO

A impedância de superfície, Z_s , é um valor complexo usado para quantificar as propriedades de reflexão (magnitude e fase) de uma superfície. Ela pode ser descrita por meio da relação entre a pressão sonora, Φ , e a velocidade de partícula, v_n , na direção normal a uma fronteira, ∂V .

$$Z_s = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\Phi}{v_n} \Big|_{\partial V}. \quad (9)$$

Modelos teóricos e empíricos têm sido propostos para prever o comportamento das impedâncias de superfície de diferentes tipos de materiais absorventes, como absorvedores porosos aplicados diretamente sobre uma superfície rígida, absorvedores porosos aplicados sobre uma cavidade de ar, absorvedores de membrana, painéis perfurados e painéis microperfurados [19, 27].

O coeficiente de absorção, α , é um valor real que está no intervalo entre 0 e 1. Ele representa a razão entre a energia sonora que é absorvida pela superfície e aquela que incide sobre ela. Z_s e α variam com a frequência e com o ângulo de incidência, θ . A rigor, para uma superfície infinita e perfeitamente lisa, α e Z_s estão relacionados por

$$\alpha(\theta) = 1 - \left| \frac{Z_s(\theta) \cos(\theta) - \rho_0 c_0}{Z_s(\theta) \cos(\theta) + \rho_0 c_0} \right|^2. \quad (10)$$

Como em acústica de salas se considera, geralmente, um campo acústico difuso, é comum que se utilize o coeficiente de absorção por incidência difusa, α_s , obtido nos ensaios feitos em câmaras reverberantes conforme a ISO 354 [18]. Pode-se, também, calcular o valor de α_s a partir de $\alpha(\theta)$. Uma das formulações que permite esse cálculo foi definida por Thomasson [28, 29],

$$\alpha_s = 8 \int_0^{\pi/2} \frac{\text{Re} \{Z_s(\theta)\} \sin \theta}{|Z_s(\theta) + Z_r(\theta)|^2} d\theta. \quad (11)$$

Essa formulação leva em consideração as dimensões da amostra de material de interesse. Isso é feito por meio da quantidade Z_r , que é a impedância de radiação. Tal quantidade pode ser obtida por integração numérica [30], o que tende a ser um processo computacionalmente custoso. No entanto, uma aproximação pode ser feita, como apresentado por [31], cuja formulação considera uma amostra retangular e assume que a velocidade de propagação do som é maior no material considerado do que no ar.

É importante observar que, ao utilizar o coeficiente de absorção por incidência difusa, α_s , duas informações são perdidas: a fase existente entre pressão incidente e refletida e a dependência da absorção com o ângulo de incidência.

5. MÉTODOS PARA OBTER IMPEDÂNCIAS DE SUPERFÍCIE A PARTIR DE COEFICIENTES DE ABSORÇÃO POR INCIDÊNCIA DIFUSA

Nos métodos baseados em acústica geométrica, a interação da frente de onda discretizada com as superfícies é representada por meio de parâmetros energéticos. Esses métodos são os utilizados na maioria dos *software* de simulação em acústica

de salas. Assim sendo, a maior parte dos dados a respeito dos materiais são fornecidos em termos do coeficiente de absorção por incidência difusa em bandas de oitava ou terço de oitava [18]. Entretanto, nos métodos que integram a equação da onda, como o BEM, é necessário que as superfícies sejam descritas em termos de valores complexos de impedâncias de superfície. Uma alternativa é recuperar diretamente impedâncias de superfície reais a partir do coeficiente de absorção. Essa é a abordagem empregada em alguns casos, como em [11]. Tais valores podem não representar adequadamente as superfícies de uma sala. Para recuperar o valor real da impedância de superfície a partir do coeficiente de absorção por incidência difusa, uma abordagem possível é considerar a regra dos 55°. Esta consiste, basicamente, na inversão da Equação (10) considerando o ângulo de incidência de $\theta = 55^\circ$. Esse ângulo é considerado por estar mais diretamente relacionado à incidência difusa [19]. Com a regra dos 55° se obtém valores reais de impedância de superfície, calculados como

$$Z_s = \frac{\rho_0 c_0}{\cos(55^\circ)} \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha_s}}{1 - \sqrt{1 - \alpha_s}}. \quad (12)$$

Por outro lado, existiriam infinitos valores complexos de impedância de superfície que poderiam corresponder a um dado valor real de coeficiente de absorção. Diversos autores propuseram métodos com o objetivo de recuperar uma impedância de superfície complexa, a partir de valores reais de coeficiente de absorção [20, 21, 32]. O método proposto por Mondet [20, 21] é empregado no presente trabalho. Este se baseia na solução de um problema de otimização com restrições. As restrições dependem do tipo de absorvedor que está sendo analisado e, portanto, é necessário algum conhecimento prévio a respeito do material. Isso garante que os resultados obtidos tenham um significado físico.

O método de recuperação de impedâncias complexas considera um modelo geral capaz de descrever o comportamento da impedância de superfície dos materiais absorvedores mais comuns (porosos, membranas, placas perfuradas e placas microperfuradas). Esse modelo é chamado de RMK + 1



em [21] e pode ser expresso como

$$Z_s(\omega) = \frac{K}{j\omega} + R + j\omega M + (j\omega)^\gamma G, \quad (13)$$

em que R , M , K e G são todos positivos e $-1 \leq \gamma \leq 1$.

A função de custo a ser minimizada pelo problema de otimização é definida como

$$F(Z_s) = |\alpha_{in} - \alpha_s(Z_s)|, \quad (14)$$

em que α_{in} são os dados iniciais, a partir dos quais se deseja recuperar o valor complexo da impedância de superfície. $\alpha_s(Z_s)$ é calculado a partir da Equação (13) e da Equação (11). Ao se minimizar o valor de $|\alpha_{in} - \alpha_s(Z_s)|$, se obtém um valor apropriado da impedância de superfície, Z_s , que descreve os dados de coeficientes de absorção iniciais, α_{in} .

Restrições são impostas durante o processo de minimização, de maneira a se obter valores de impedância de superfície que representem o comportamento esperado dos materiais absorvedores. Inicialmente, os absorvedores são divididos em duas categorias: (i) materiais macios e (ii) materiais duros. As restrições para as categorias (i) e (ii) são:

$$\text{Materiais macios: } \operatorname{Re}\{Z_s(\omega)\} < 2; \quad (15)$$

$$\text{Materiais duros } \operatorname{Re}\{Z_s(\omega)\} > 1. \quad (16)$$

Os seguintes absorvedores são considerados como (i) materiais macios: (a) absorvedores porosos montados sobre uma superfície rígida, com resistividade ao fluxo $\sigma \leq 20$ [kNsm⁻⁴] e espessura $d \leq 10$ [cm]; (b) painéis perfurados; (c) absorvedores de membrana. Para absorvedores de membrana, uma restrição adicional é incluída: $\gamma \geq 0.9$.

Os seguintes absorvedores são consideradas como (ii) materiais duros: (a) absorvedores porosos montados sobre uma superfície rígida, com resistividade ao fluxo $\sigma > 20$ [kNsm⁻⁴] e espessura $d > 10$ [cm]; (b) painéis microp perfurados. Para materiais porosos duros, a seguinte restrição é adicionada: $\operatorname{Re}\{Z_s(\omega)\} < 2$ para $f \geq 1600$ [Hz].

Para materiais porosos, independentemente se classificados como materiais macios ou duros, uma restrição adicional é $\operatorname{Im}\{Z_s(\omega)\} < 0$. Para

absorvedores porosos montados sobre uma camada de ar, os limites estabelecidos para diferenciar entre materiais macios e duros diminuem à medida que a espessura da camada de ar aumenta. Esse comportamento requer investigações adicionais, uma vez que os limites não foram claramente definidos em [21]. Por isso, para esse tipo de material, os parâmetros dos absorvedores considerados no trabalho foram mantidos distantes dos limites.

No presente trabalho, a função de custo definida na Equação (14) é minimizada utilizando uma rotina em Python. É utilizado o módulo “`scipy.optimize.minimize`” com o método *Sequential Least Squares Programming* (SLSQP) [33, 34].

6. APRESENTAÇÃO DA FERRAMENTA DE SIMULAÇÃO E SUAS FUNCIONALIDADES

A ferramenta de simulação demonstrada no presente trabalho está sendo desenvolvida sob o conceito de código aberto, de maneira a incentivar a participação de novos desenvolvedores. Além disso, todo o desenvolvimento tem sido pensado para tornar amigável o processo de aprendizado e simulação para novos usuários. Para tanto, a simulação pode ser realizada em um *notebook* utilizando a ferramenta Colab do Google <https://colab.research.google.com/>. Os *notebooks* do Google Colab permitem que os processos executados durante a simulação possam ser guiados, explicados e documentados. Além disso, se tem acesso gratuito a GPUs, nenhuma configuração prévia é necessária e o compartilhamento pode ocorrer de forma fácil e direta. Esses recursos permitem que qualquer usuário possa realizar as simulações somente tendo um computador com acesso à internet, não sendo utilizados os recursos da máquina local. Um *notebook* que pode ser utilizado como modelo está disponível no repositório da ferramenta, que pode ser acessado em <https://github.com/MuriloCardosoSoares/sea>.

Os códigos estão escritos em linguagem Python, que possui como uma das principais características permitir uma fácil leitura do código e tem sido uma linguagem cada vez mais difundida. Ela permite a programação orientada a objeto, que é o paradigma adotado aqui. Para tanto, foram de-

envolvidas sete classes para instanciar diferentes objetos. A principal delas é classe **Room**, que permite criar um objeto que representa a sala que será simulada. Todas as outras classes deste pacote dependem da classe **Room** e são criadas a partir dela, em uma hierarquia que se costuma denominar como composição. A estrutura é feita dessa forma para que o processo de configuração da simulação ocorra de forma intuitiva. Ou seja, primeiro se cria a sala e depois se fazem definições necessárias, se adicionam fontes, receptores e materiais. As outras seis classes são **Air**, **Algorithm**, **Source**, **Receiver**, **Directivity** e **Material**. É a partir da classe **Room** que todos os demais objetos são criados. O atributo **room_name** será o nome do arquivo *.pickle* salvo posteriormente, que irá guardar as configurações da sala e os resultados da simulação.

Uma vez que o objeto que representa a sala é criado, por padrão os valores da velocidade do som no ar, c_0 , e da massa específica do ar, ρ_0 , são $c_0 = 343$ m/s e $\rho_0 = 1,21$ kg/m³. Utilizando **print(my_room.air)** esses valores são mostrados. É possível, também, calcular c_0 e ρ_0 a partir da temperatura, T , umidade relativa do ar, UR , e pressão atmosférica, P_{atm} , utilizando o método **my_room.air.standardized_c0_rho0()**. Por padrão, esses valores são $T = 20^\circ\text{C}$, $UR = 50\%$ e $P_{atm} = 101.325$ Pa, mas podem ser alterados. Os novos valores de c_0 e ρ_0 serão sobrescritos aos anteriores.

Utilizando o método **my_room.algorithm_control()**, é possível estabelecer para quais frequências a simulação será realizada. Duas abordagens são possíveis. Pode-se passar três argumentos para o método, **freq_init**, **freq_end** e **freq_step**, que serão, respectivamente, a frequência inicial, a frequência final e o passo do vetor de frequências para as quais a simulação irá ser realizada. Pode-se, também, estabelecer diretamente os valores de **freq_vec** como uma lista ou um *numpy array*. Sempre que o método **my_room.algorithm_control()** for utilizado, os valores de **freq_init**, **freq_end**, **freq_step** e **freq_vec** serão sobrescritos. O método **my_room.add_geometry()** permite fazer o *upload* do arquivo *.geo* contendo a geometria da sala. Esse arquivo pode ser gerado utilizando a ferramenta de código aberto *gmsh* [35]. As

malhas são geradas automaticamente levando em consideração o número de elementos de acordo com o comprimento de onda da frequência em cada passo da simulação. São considerados pelo menos seis elementos por comprimento de onda até 265 Hz. Acima dessa frequência são considerados quatro elementos por comprimento de onda devido a memória RAM limitada disponível em um *notebook* do Google Colab. No *gmsh* é possível agrupar as superfícies utilizando *physical groups*. Para cada *physical group* formado no processo de criação da geometria será atribuído um material na próxima etapa. No repositório da ferramenta há uma geometria que pode ser utilizada como exemplo. Tendo executado o primeiro passo da simulação, o usuário pode acessá-la na aba lateral do Google Colab, realizar o *download* e selecionar o arquivo quando executar o método **my_room.add_geometry()**. Para essa geometria cinco *physical groups*, e consequentemente cinco materiais, são considerados. Na Figura 2 cada cor representa um material.

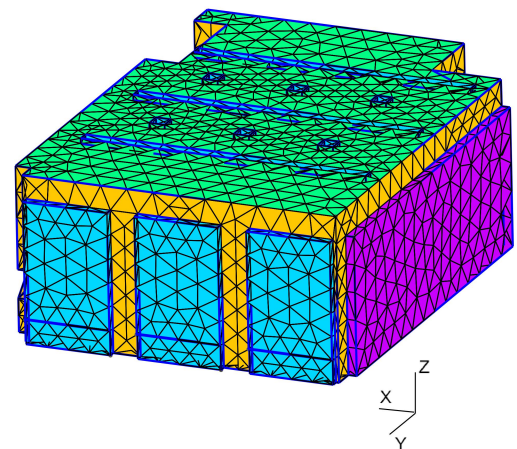


Figura 2: Sala utilizada como exemplo. Cada cor representa um material diferente a ser considerado.

Para adicionar fontes e receptores, são utilizados, respectivamente, os métodos **my_room.add_source()** e **my_room.add_receiver()**. Vamos analisar cada um em particular. Para o método **my_room.add_source()**, o primeiro argumento deve ser a coordenada da fonte, descrita como uma lista na forma $[x, y, z]$. Por padrão, o valor é **coord** = $[0.0, 0.0, 1.0]$. Além disso, o argumento **type** permite caracterizar a fonte como sendo onidirecional, “monopole”, ou direcional, “direc-



tional”. Se considerarmos um monopolo, pode-se caracterizar a potência sonora da fonte utilizando *keyworded arguments*, que são argumentos do método que devem ser passados com uma palavra-chave. A primeira opção é utilizar diretamente o argumento **q** na forma de uma lista, com um valor correspondente a cada frequência que será simulada. Esse argumento **q** corresponde a $j\rho_0\omega Q_s$, conforme discutido na Seção 2. Uma segunda opção é estabelecer um valor constante de potência sonora, utilizando o argumento **nws**. Nesse caso, um único valor de **q** será calculado para todas as frequências. A última opção é fornecer o espectro da potência sonora da fonte em bandas. Para tanto, basta utilizar no método os argumentos **power_spec** e **bands**. Nesse caso, o valor de **q**, necessário para a simulação, será calculado para cada frequência a partir do espectro da potência sonora. Utilizando o método **my_room.list_sources()**, é possível listar as fontes que foram adicionadas à simulação. Por fim, o método **my_room.del_sources()** permite apagar fontes que foram adicionadas. Se nenhum argumento for passado ao método, todas as fontes serão apagadas. Pode-se, também, passar uma lista com as fontes que se desejam apagar, considerando a ordem em que elas foram inseridas.

Se quisermos considerar a direcionalidade de uma fonte, o argumento **type** deve ser “directional”. Nesse caso, é possível ajustar o nível da fonte utilizando o argumento **power_correction**. Este valor depende da relação entre o nível que se deseja considerar na simulação e o nível utilizado nas medições da fonte consideradas no cálculo dos coeficientes dos harmônicos esféricos. Com os argumentos **elevation** e **azimuth** é possível alterar a orientação do eixo de radiação principal da fonte. Será necessário, ainda, realizar o *upload* do arquivo *.pickle* que deve ser gerado utilizando a classe **Directivity**. O objetivo principal da classe **Directivity** é calcular os coeficientes dos harmônicos esféricos que caracterizarão a direcionalidade da fonte sonora. O primeiro argumento é o caminho para o arquivo *.mat*, que contém os dados medidos. É importante frisar aqui que a classe está preparada para receber os arquivos conforme foram salvos no banco de dados do BRAS (*benchmark for room acoustical simulation*) [36, 37]. Os argumentos seguintes são a velocidade do som

no ar, c_0 , e a densidade do ar, ρ_0 , que devem ser considerados nos cálculos. Também é necessário estabelecer para quais frequências os coeficientes dos harmônicos esféricos devem ser calculados, utilizando o argumento **freq_vec**. Os argumentos **simulated_ir_duration** e **measurement_radius** se referem, respectivamente, à duração, em segundos, das respostas impulsivas medidas e à distância entre fonte e pontos de medição. O argumento **sh_order** estabelece até que ordem os coeficientes dos harmônicos esféricos serão calculados. **type** caracteriza que está sendo feito o cálculo para uma fonte, **type** = “source”. **sample_rate** define a frequência de amostragem das respostas impulsivas medidas. Por padrão, **sample_rate** = 44100 Hz. Por último, o *keyworded argument* **existing_pre_delay** pode ser usado para corrigir o atraso antes que o som direto chegue aos microfones. O método **encode_directivity()** é usado para realizar os cálculos. O argumento **file_name** estabelece o nome do arquivo *.pickle* que será salvo e deverá ser utilizado na simulação. Para esse cálculo, o recomendado é que seja feito na máquina local e não no *notebook* do Google Colab. Isso porque, se o *notebook* for utilizado, será necessário realizar o *upload* do arquivo com os dados da medição da fonte, o que demandaria bastante tempo, já que esses arquivos tendem a ser grandes.

Para o método **my_room.add_receiver()**, o argumento deve ser a coordenada do receptor, descrita como uma lista na forma $[x, y, z]$. Por padrão, o valor é **coord** = $[1.0, 0.0, 0.0]$. De forma semelhante ao que foi visto para as fontes sonoras, é possível utilizar os métodos **my_room.list_receivers()** e **my_room.del_receivers()**.

Executando o método **my_room.view()**, será mostrada a sala com o posicionamento das fontes e dos receptores em um *plot* 3D, conforme exemplificado na Figura 3.

Uma vez que já está definida a geometria da sala, pode-se adicionar os materiais às superfícies. Isso é realizado utilizando o método **my_room.add_material()**, que dá acesso a diversas funcionalidades. Vale notar que o número de materiais adicionados deve corresponder ao número de *physical groups* presentes no arquivo da geometria. A geometria usada como modelo no repositório, por exemplo, pos-

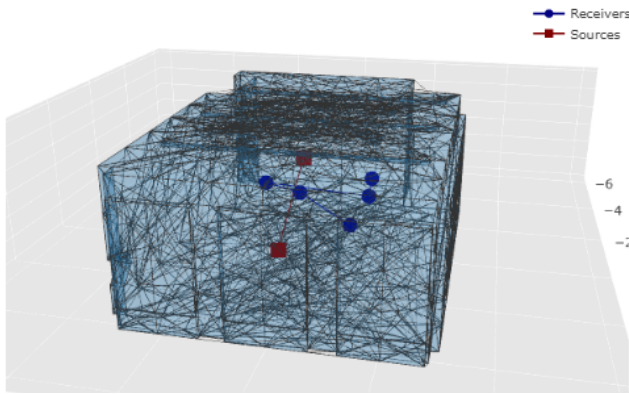


Figura 3: Plot 3D com visualização da geometria da sala e das fontes e receptores.

sui cinco *physical groups* e, dessa forma, o método `my_room.add_material()` deve ser utilizado cinco vezes para caracterizar os materiais presentes na sala. A forma mais direta de caracterizar um material para a simulação é definindo a admitância do material utilizando o *keyworded argument* **admittance**. O argumento **admittance** deve ser uma lista contendo o valor da admitância do material para cada frequência que será considerada na simulação.

Pode-se também especificar a impedância de superfície ou a impedância de superfície normalizada. Para tanto, devem-se utilizar os *keyworded arguments* **surface_impedance** ou **normalized_surface_impedance**, respectivamente. Da mesma forma que no caso da admitância, esses argumentos devem ser listas contendo os valores para cada passo de frequência. Se forem passados valores de impedância para o método, os valores das admitâncias, necessários na simulação, serão automaticamente calculados. Outra possibilidade para caracterizar os materiais presentes nas superfícies da sala é utilizando modelos matemáticos. Estão implementados na ferramenta modelos para os materiais absorvedores mais comuns, a saber, absorvedores porosos com e sem uma camada de ar na parte de trás, absorvedores de membrana, placas perfuradas e placas microperfuradas. Para caracterizar os materiais dessa forma, pode-se utilizar o método `my_room.add_material()`. Ele deve receber dois *keyworded arguments*, **absorber_type** e **parameters**. O argumento **absorber_type** deve ser um *string* que irá caracterizar o tipo de absorvedor que se deseja modelar. Os valores possíveis são "porous", "porous with air cavity", "membrane", "perforated panel" e "microperforated panel". Já o *keyworded ar-*

gument **parameters** deve ser uma lista contendo os parâmetros do absorvedor, o que irá variar conforme a escolha de **absorber_type**.

A última possibilidade de caracterização de materiais implementada na ferramenta é por meio de coeficientes de absorção. Como foi discutido na Seção 5, os coeficientes de absorção não representam uma informação completa necessária nos métodos de simulação que resolvem a equação da onda, como o BEM. Portanto, é necessário calcular a admitância dos materiais a partir desses coeficientes de absorção. A primeira é abordagem é a que foi definida na Equação (12), conhecida como regra dos 55°. Essa abordagem irá calcular valores reais de impedância de superfície ou admitância a partir de coeficientes de absorção em bandas de oitava ou terço de oitava. Para utilizá-la, é necessário primeiro passar para o método `my_room.add_material()` os *keyworded arguments* **octave_bands_statistical_alpha** e **octave_bands**, caso os dados sejam coeficientes de absorção em bandas de oitava, ou **third_octave_bands_statistical_alpha** e **third_octave_bands**, caso os dados sejam coeficientes de absorção em bandas de terço de oitava. Depois, utiliza-se o método `my_room.materials[0].55_rule()`, onde o número entre colchetes está relacionado ao material para o qual o método será executado, de acordo com a ordem de inclusão.

A segunda abordagem é utilizar o método de recuperação de impedâncias complexas descrito na Seção 5. Para tanto, além de passar para o método os coeficientes de absorção em bandas de oitava ou terço de oitava utilizando os *keyworded arguments* adequados, é necessário também especificar o tipo de material absorvedor por meio do *keyworded argument* **absorber_type**, que deve ser um *string* com os valores possíveis sendo "soft porous", "hard porous", "membrane", "perforated panel", "microperforated panel" e "hard". A caracterização dos materiais de acordo com essas categorias foi apresentada na Seção 5.

De forma semelhante ao que foi visto para as fontes e receptores, no caso dos materiais os métodos `my_room.del_materials()` e `my_room.list_materials()` permitem apagar materiais e listar todos os materiais que foram adicionados, respectivamente. É importante frisar



que os materiais devem ser adicionados de acordo com a ordem dos *physical groups* criados no processo de desenho da geometria no *gms*.

Agora que todas etapas de caracterização necessárias foram concluídas, o método **my_room.run()** dá início ao processo de simulação em si. A cada passo de frequência executado, os resultados serão salvos em um arquivo *.pickle* no drive. Por isso, será solicitado acesso a um Google Drive quando o método for executado.

Terminado o processo de simulação, existem dois métodos já implementados que auxiliam na análise e visualização dos resultados. O método **my_room.plot_spl()** permite plotar o nível de pressão sonora (NPS) para os pares fonte-receptor considerados na simulação. Se nenhum argumento for passado ao método, será plotado o NPS para todos os pares. Pode-se, também, estabelecer para quais fontes e receptores se deseja visualizar. Para isso, o primeiro argumento deve ser uma lista contendo as fontes e o segundo uma lista contendo as receptores. Já o método **my_room.plot_phase()**, que tem funcionamento semelhante, pode ser utilizado para plotar a fase das respostas.

Se, por qualquer motivo, o processo de simulação for interrompido, basta acessar novamente o *notebook*, executar a primeira célula, realizar o *upload* do arquivo *.pickle*, que foi salvo e executar o método **my_room.run()**. Nesse caso, será solicitado que se faça novamente o *upload* do arquivo *.geo* com a geometria da sala. Também é possível salvar os resultados da simulação no disco local. Para tanto, basta executar o método **my_room.save("local")**.

7. RESULTADOS OBTIDOS UTILIZANDO A FERRAMENTA DE SIMULAÇÃO

Na presente seção são apresentados alguns resultados obtidos utilizando a ferramenta de simulação. Uma análise mais completa e detalhada desses resultados pode ser encontrada nas Refs. [22–24]. Na Figura 4, é considerada uma sala hipotética, para um caso de teste teórico. Inicialmente, a simulação é realizada considerando valores de impedância calculados a partir de modelos matemáticos que foram prescritos às superfícies da sala. Os resultados dessa simulação são tomados como um referência. A partir desses valores de impedância

de superfície, foram, então, calculados valores de coeficiente de absorção. A partir dos valores de coeficientes de absorção, dois conjuntos de impedâncias de superfície são, então, recuperados: valores reais e valores complexos. Esses dois conjuntos de impedâncias de superfície são prescritos às superfícies da sala e os resultados são comparados com a referência. Como é possível observar, os resultados foram mais próximos da referência quando foram utilizadas impedâncias complexas.

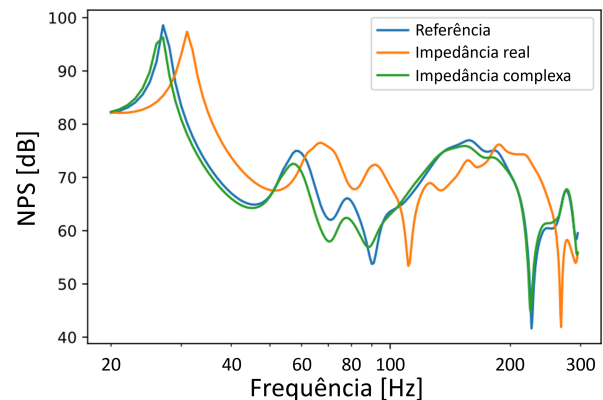
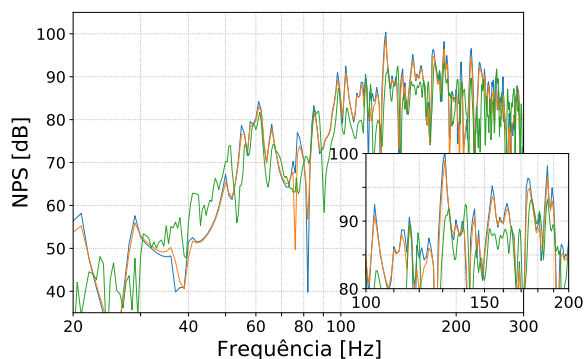


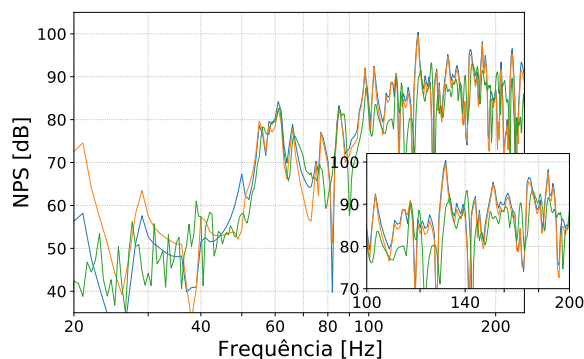
Figura 4: Comparação do uso de valores de impedância de superfície reais ou complexas para um caso de teste teórico.

Na Figura 5a são apresentados resultados para a sala CR2 (*Complex Room 2*) do BRAS. O BRAS é um banco de dados criado para o *Round Robin* 4. Para a sala CR2 são fornecidos a geometria, os coeficientes de absorção dos materiais que compõem as superfícies e resultados de medições acústicas realizadas no interior da sala. A impedância de superfície foi então recuperada de duas formas: diretamente, obtendo-se valores reais, e utilizando o método para obtenção de valores complexos de impedância de superfície. Os resultados das simulações utilizando esses dois conjuntos de impedâncias de superfície são, então, comparados com as medições. Como é possível observar, nesse caso, a diferença entre a utilização de valores reais ou complexos de impedância de superfície é pequena. Acredita-se que isso se deva à baixa absorção dos materiais que compõem as superfícies da sala.

Por fim, na Figura 5b é apresentado um resultado obtido considerando a direcionalidade da fonte sonora utilizando a técnica dos harmônicos esféricos. Nesse contexto, não houve uma diferença considerável nos resultados com a consideração



(a) NPS obtido nas simulações considerando valores complexos de impedância de superfície (—) e valores reais de impedância de superfície (—), comparados com os dados experimentais (—).



(b) NPS obtido nas simulações considerando monopolo (—) e a direcionalidade da fonte com a técnica dos harmônicos esféricos (—), comparados com os dados experimentais (—).

Figura 5: Resultados obtidos utilizando a ferramenta de simulação considerando uma sala real.

da direcionalidade da fonte.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente artigo foi apresentada uma ferramenta de simulação em acústica de salas que utiliza o método dos elementos de contorno. Foi introduzida a fundamentação teórica relacionada aos modelos matemáticos utilizados, uma visão geral sobre o uso da ferramenta e, também, alguns resultados obtidos.

Para continuação do desenvolvimento do trabalho, destaca-se a aplicação da técnica dos harmônicos esféricos para consideração da direcionalidade também de receptores, e não somente das fontes sonoras. Isso permitiria a obtenção de resultados binauriculares. Além disso, é necessária uma análise de resultados mais abrangente, que considere, por exemplo, salas com maior absorção.

9. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- [1] Schroeder, Manfred R. The “schroeder frequency” revisited. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(5):3240–3241, 1996.
- [2] Vorländer, Michael e Summers, Jason E. Auralization: Fundamentals of acoustics, modelling, simulation, algorithms, and acoustic virtual reality. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(6):4028, 2008.
- [3] Savioja, Lauri e Svensson, U Peter. Overview of geometrical room acoustic modeling techniques. *J. Acoust. Soc. Am.*, 138(2):708–730, 2015.
- [4] Meissner, Mirosław. Acoustics of small rectangular rooms: Analytical and numerical determination of reverberation parameters. *Appl. Acoust.*, 120:111–119, 2017. doi: [10.1016/j.apacoust.2017.01.020](https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2017.01.020).
- [5] Błaszak, MA. Acoustic design of small rectangular rooms: Normal frequency statistics. *Appl. Acoust.*, 69(12):1356–1360, 2008. doi: [10.1016/j.apacoust.2007.10.005](https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2007.10.005).
- [6] Saarelma, Jukka. *Finite-difference time-domain solver for room acoustics using graphics processing units*. Dissertação de mestrado, Aalto University, Espoo, 2013. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/80710952.pdf>.
- [7] Bilbao, Stefan; Ahrens, Jens e Hamilton, Brian. Incorporating source directivity in wave-based virtual acoustics: Time-domain models and fitting to measured data. *J. Acoust. Soc. Am.*, 146(4):2692–2703, 2019. doi: [10.1121/1.5130194](https://doi.org/10.1121/1.5130194).
- [8] Atalla, Noureddine e Sgard, Franck. *Finite element and boundary methods in structural acoustics and vibration*. CRC Press, 2015.
- [9] Pind, Finnur; Jeong, Cheol-Ho; Engsig-Karup, Allan P; Hesthaven, Jan S e Strømmand-Andersen, Jakob. Time-domain room acoustic simulations with extended-reacting porous absorbers using the discontinuous galerkin method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 148(5):2851–2863, 2020. doi: [10.1121/10.0002448](https://doi.org/10.1121/10.0002448).
- [10] Hornikx, Maarten; Krijnen, Thomas e Harten, Louis. openPSTD: The open source pseudospectral time-domain method for acoustic propagation. *Computer Physics Communications*, 203:298–308, 2016. doi: [10.1016/j.cpc.2016.02.029](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2016.02.029).
- [11] Hargreaves, Jonathan A; Rendell, Luke R e Lam, Yiu W. A framework for auralization of boundary



- element method simulations including source and receiver directivity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 145(4):2625–2637, 2019.
- [12] Śmigaj, W.; Betcke, T.; Arridge, S.; Phillips, J. e Schweiger, M. Solving boundary integral problems with BEM++. *Acm. T. Math. Software*, 41(2):6:1–6:40, 2015. doi: [10.1145/2590830](https://doi.org/10.1145/2590830).
- [13] Scroggs, M. W.; Betcke, T.; Burman, E.; Śmigaj, W. e Wout, E. Software frameworks for integral equations in electromagnetic scattering based on Calderón identities. *Computers & Mathematics with Applications*, 74(11):2897–2914, 2017. doi: [10.1016/j.camwa.2017.07.049](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.07.049).
- [14] Betcke, T.; Scroggs, M. W. e Śmigaj, W. Product algebras for Galerkin discretizations of boundary integral operators and their applications. *Acm. T. Math. Software*, 46(1):4:1–4:22, 2020. doi: [10.1145/3368618](https://doi.org/10.1145/3368618).
- [15] Kirkup, Stephen Martin. *The boundary element method in acoustics*. Integrated sound software, 2007.
- [16] Sakamoto, Shinichi e Takahashi, Risa. Directional sound source modeling by using spherical harmonic functions for finite-difference time-domain analysis. Em *Proceedings of Meetings on Acoustics*, volume 19, pág. 015129, 2013.
- [17] Georgiou, Fotis e Hornikx, Maarten. Incorporating directivity in the Fourier pseudospectral time-domain method using spherical harmonics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 140(2):855–865, 2016.
- [18] ISO, EN. 354:2003. Acoustics. measurement of sound absorption in a reverberation room. 2003.
- [19] Cox, Trevor J e D’antonio, Peter. *Acoustic Absorbers and Diffusers: Theory, Design and Application*. Taylor and Francis, New York, 2009.
- [20] Mondet, Boris; Brunskog, Jonas; Jeong, Cheol-Ho e Rindel, Jens Holger. Retrieving complex surface impedances from statistical absorption coefficients. Em *46th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering*, 2017.
- [21] Mondet, Boris; Brunskog, Jonas; Jeong, Cheol-Ho e Rindel, Jens Holger. From absorption to impedance: Enhancing boundary conditions in room acoustic simulations. *Appl. Acoust.*, 157, 2020.
- [22] Soares, Murilo C; Brandão, Eric; Tenenbaum, Roberto A e Alvim, Luiz Augusto TF. A study case applying a method to retrieve complex surface impedances from statistical absorption coefficients aiming room acoustics simulation using boundary element method. Em *49th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering*, volume 261, págs. 1698–1709. Seoul, 2020.
- [23] Soares, Murilo Cardoso; Carneiro, Eric Brandão; Tenenbaum, Roberto Aizik e Mareze, Paulo Henrique. Low-frequency room acoustical simulation of a small room with bem and complex-valued surface impedances. *Appl. Acoust.*, 188:108570, 2022.
- [24] Soares, Murilo Cardoso. *Ferramenta de código aberto para simulação em acústica de salas na região de baixa frequência*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Maria, 2021.
- [25] Pollow, Martin. *Directivity patterns for room acoustical measurements and simulations*. Logos Verlag Berlin GmbH, Vol. 22, 2015.
- [26] Williams, Earl G. *Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. Academic press, Londres, 1999.
- [27] Brandão, Eric. *Acústica de salas: projeto e modelagem*. Blucher, São Paulo, 2018.
- [28] Thomasson, S-I. On the absorption coefficient. *Acta Acust. Acust.*, 44(4):265–273, 1980.
- [29] Thomasson, Sven-Ingvar. *Theory and experiments on the sound absorption as function of the area*. Department of Acoustics, Royal Institute of Technology, 1982.
- [30] Pereira, M.; Mareze, P.H.; Godinho, L.; Amado-Mendes, P. e Ramis, J. Proposal of numerical models to predict the diffuse field sound absorption of finite sized porous materials – bem and fem approaches. *Appl. Acoust.*, 180:108092, 2021. ISSN 0003-682X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2021.108092>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003682X21001857>.
- [31] Davy, John L; Larner, David J; Wareing, Robin R e Pearce, John R. The average specific forced radiation wave impedance of a finite rectangular panel. *J. Acoust. Soc. Am.*, 136(2):525–536, 2014.
- [32] Rindel, Jens Holger. An impedance model for estimating the complex pressure reflection factor. Em *Forum Acusticum*, 2011.
- [33] Scipy. Scipy documentation. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.minimize-slsqp.html#optimize-minimize-slsqp>. Accessed: 2021-07-31.
- [34] Kraft, Dieter. *A software package for sequential quadratic programming*. Tech. Rep. DFVLR-FB 88-28, DLR German Aerospace Center – Institute for Flight Mechanics, Koln, Germany, 1988.
- [35] Geuzaine, Christophe e Remacle, Jean-François. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 79(11):1309–1331, 2009.
- [36] Brinkmann, Fabian; Aspöck, Lukas; Ackermann, David; Lepa, Steffen; Vorländer, Michael e Weinzierl, Stefan. A round robin on room acoustical simulation and auralization. *J. Acoust. Soc. Am.*, 145(4): 2746–2760, 2019.
- [37] Aspöck, Lukas; Brinkmann, Fabian; Ackermann, David; Weinzierl, Stefan e Vorländer, Michael. Bras - benchmark for room acoustical simulation, 2020.